Leçon 156 - Exponentielle de matrices. Applications.

Cadre : On se place sur $M_n(K)$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que l'on munit d'une norme de K-algèbre.

1. Exponentielle de matrices. —

1. La série exponentielle. —

- Def : Pour $A \in M_n(K)$, on définit la série $\sum_n \frac{A^k}{k!}$ appelée série exponentielle de A.
- Pro : La série exponentielle est de rayon de convergence $R = +\infty$. Pour tout $r < 0$, cette série est normalement convergente sur $\overline{B(0,r)}$.
  $\forall A \in M_n(K)$, on peut ainsi définir $exp(A)$ comme la somme de la série exponentielle de A.
- Pro : On a $\|exp(A)\| \leq exp(\|A\|)$.
- Pro : Si A et B commutent, alors $exp(A+B) = exp(A)exp(B)$.
- Contre-ex: Avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- App : $exp(A) \in Gl_n(K)$ avec $exp(A)^{-1} = exp(-A)$.
- Pro : $exp(A^t) = exp(A)^t$, $exp(\overline{A}) = \overline{exp(A)}$.
- Pro : Pour tout $P \in Gl_n(K)$, $exp(PAP^{-1}) = Pexp(A)P^{-1}$.
- Ex : Pour N nilpotente d'indice $r \geq 1$, $exp(N) = I_n + N + .. + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!}$.
- Ex : Pour $D = Diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$, $exp(D) = Diag(exp(\lambda_1), .., exp(\lambda_n))$.
- Rem : Plus généralement, si $D = Diag(A_1, .., A_r)$, $exp(D) = Diag(exp(A_1), .., exp(A_r))$.
- App : exp est injective sur $D_n(\mathbb{R})$.
- Contre-ex: $exp(\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$, $\forall t \in K$.

2. Lien avec les polynômes d'endomorphismes. —

- Def+Pro : Pour $u \in End(K^n)$ on définit le morphisme d'évaluation $P \in K[X] \mapsto P(u) \in End(K^n)$, et on note $K[u]$ son image.
  $K[u]$ est une sous-K-algèbre de $End(E)$, qui est commutative.
  Il existe un unique polynôme unitaire μ_u qui engendre le noyau de ce morphisme, appelé polynôme minimal de u, et on a l'isomorphisme de K-algèbres $K[X]/(\mu_u) \simeq K[u]$.
- Rem : On peut alors définir $exp(u)$ comme l'endomorphisme v dont la matrice dans une base B est $exp(Mat(u,B))$.
- Rem : Comme $K[u]$ est un s-ev de dimension finie de $End(E)$, il est fermé pour la norme d'opérateur sur $End(E)$.
- App : $exp(A) \in K[A]$.
- Rem : Un polynôme P tel que $P(A) = exp(A)$ dépend totalement de A.
- Contre-ex : Pour N nilpotente d'indice 2, un tel P est de la forme : $P(X) = 1 + X + X^2Q(X)$.
  Pour $M = I_n$, un tel P est de la forme $P(X) = e^1 + (X-1)R(X)$.
- Cor : $exp(A)$ commute avec tout polynôme en A.

3. Méthodes de calcul. —

- Méthode 1 : On se ramène à similitude près à une forme diagonale par blocs, l'exponentielle préservant l'écriture diagonale par blocs, puis on calcule l'exponentielle de chaque bloc.
- Def : Soit $r \geq 1$ et $\lambda \in K$. Pour $r \geq 2$, on définit M_r la matrice avec des 1 juste au-dessus de la diagonale, et $M_1 = (0)$.
  On définit le bloc de Jordan associé à λ et de taille r par $J_r(\lambda) := \lambda.I_r + N_r$.
- Théorème : Réduction de Jordan des matrices trigonalisables : Toute matrice $M \in M_n(K)$ trigonalisable est semblable à $Diag(J_{r_1}(\lambda_1), .., J_{r_s}(\lambda_s))$ avec $r_1, .., r_s \geq 1$ et $\lambda_1, .., \lambda_s \in K$.
- Ex : Dans le cas d'une matrice nilpotente, tous les λ_i sont nuls.
- Méthode : On obtient la forme de Jordan de M en déterminant les valeurs propres γ_i de M, puis en étudiant la restriction des endomorphismes $M - \gamma_i.I_n$ à $Ker((M - \gamma_i I_n)^n)$, qui sont des endomorphismes nilpotents, et en trouvant une base de chaque s-ev dans laquelle chaque endomorphisme nilpotent est dans sa forme de Jordan.
- Pro : M est trigonalisable ssi μ_M est scindé sur K.
  Ainsi, toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- Ex : $exp(J_r(\lambda)) = exp(\lambda).(I_r + N_r + .. + \frac{N_r^{r-1}}{(r-1)!})$.
- Ex : $exp(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}) = exp(a)\begin{pmatrix} cos(b) & -sin(b) \\ sin(b) & cos(b) \end{pmatrix}$.
- App : $exp : A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.
- Méthode 2 : On calcule la décomposition de Dunford de A afin de pouvoir calculer exp(A).
- Pro : Pour $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A, on a : $exp(A) = exp(D).\sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$, où r est l'indice de nilpotence de N.
- Rem : A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $exp(A)$ est diagonalisable.

2. Exponentielle et topologie. —

- Pro : $exp : M_n(K) \to Gl_n(K)$ est continue comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini.
- Pro : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $det(exp(A)) = exp(Tr(A))$.
- **Dev** : $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
- Pro : $exp : M_n(K) \to Gl_n(K)$ est de classe C^∞ comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini.
- Pro : $D_A(exp)(H) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(\sum_{k=0}^{n-1} A^k H A^{n-1-k})$, la série entière apparaissant étant de rayon de convergence $+\infty$.
- Cor : Si H commute avec A, $D_A(exp)(H) = exp(A).H$.
- Pro+Def : $D_0(exp)(H) = H$. Ainsi, exp est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage U de 0 vers un voisinage de V I_n.
  On définit $ln : V \to U$ sa fonction inverse.

– Pro : Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\|M\| \leq 1$ et $I_n + M \in V$, on a alors $ln(I_n + M) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}M^n}{n}$, somme d'une série entière de rayon de convergence 1.
– App : $Gl_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits (inclus dans des boules de taille arbitrairement petites)
– **Dev** : $exp : M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective. De plus, $exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in Gl_n(\mathbb{R})\}$.
– Cor : $\forall B \in Gl_n(\mathbb{C})$, $\forall p \in \mathbb{R}^*$, $\exists A \in M_n(\mathbb{C})$ tq $B = A^p$.
– Contre-ex : Si $B = N_n$, il n'y a aucun A tel que $B = A^r$ $\forall r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$.

3. Applications en calcul différentiel et géométrie différentielle. —

1. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants. —

– Pro : Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, les solutions de l'équation différentielle linéaire $Y'(t) = M.Y(t)$ sont de la forme $Y(t) = Y_0.exp(tM)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
– Def : Une solution Y de l'équation différentielle linéaire $Y'(t) = M.Y(t)$ est dite asymptotiquement stable ssi $\|Y(t)\|$ est bornée quand $t \to +\infty$.
– Pro : Une solution est asymotptiquement stable ssi les blocs de Jordan de M dans $M_n(\mathbb{C})$ de taille 1 sont de partie réelle ≤ 0, et que les blocs de Jordan de taille ≤ 2 sont de partie réelle < 0.
– Pro : Solutions de $Y'(t) = A.Y(t) + B$.
– Pro : Tout morphisme f continu de $\mathbb{R}$ dans $Gl_n(\mathbb{R})$ est différentiable, vérifie $f'(t) = f(1).f(t)$, et est de la forme $f(t) = exp(tA)$ pour $A = f(1)$.

2. Exponentielle et sous-variétés. —

– Def : Une partie $V \subset \mathbb{R}^m$ est une sous-variété de dimension r ssi pour tout point x_0 de V il existe un C^1-difféomorphisme φ d'un voisinage U de 0 vers un voisinage W de x_0 tel que $\varphi^{-1}(V \cap W) = U \cap (\mathbb{R}^r \times \{0\}^{m-r})$.
– Pro : $exp(A + B) = \lim_n [(exp(\frac{A}{n})esp(\frac{B}{n}))^n]$
– **Dev** : Théorème de Cartan-Von Neumann : Tout sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété.
– Ex : $O_n(\mathbb{R}) := Ker(M \mapsto M^tM - I_n)$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R})$.
– Ex : $Sl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dim $n^2 - 1$.

Références

Gourdon : Série exponentielle, rayon de convergence, exp de matrices, norme, propriétés, inversibilité, $exp(A^t)$,$exp(\overline{A})$, cas commutatif, $exp(PAP^{-1})$, $exp(Diag())$, non-injectivité. Décomposition de Dunford, $exp(D + N)$, décomposition de Jordan, exp d'un bloc de Jordan.
Mneimé, Testard : $exp(A)$ est un poly en A, le poly dépend de A. exp est un C^1-difféom entre 0 et I_n, $Gl_n(\mathbb{C})$ n'a pas de sous-groupes finis arbitrairement petits.
Zavidovique : $exp : M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n^(\mathbb{C})$ surjective.(Dev)
Demailly : Solutions de systèmes différentiels linéaires à coeffs constants, exemples.
FGN (Algèbre 2) : Morphismes continus $\mathbb{R} \to Gl_n(\mathbb{R})$.
Caldero,Germoni : $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéo.(Dev)
Lafontaine : Morphismes continus $\mathbb{R} \to Gl_n(\mathbb{R})$. Def sous-variété.
Gonnord, Tosel : Th de Cartan-Von Neumann.(Dev), plan tangent de certains s-g fermés de Gl_n, exemples.
Rouvière : Exp cont, Exp C^∞, $D_A(exp)$.
Sans Ref : Définition du log, série entière, difféom entre $\mathscr{N}$ et $\mathscr{U}$.

June 3, 2017
Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes